19302

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1991
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

(01) ශුද්ධ ගණිතය II (01) PURE MATHEMATICS II	**01** **S II**

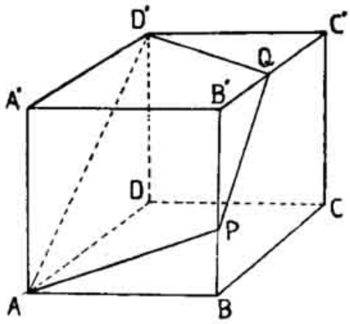
පැ. තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. D, E, F යනු ABC ත්‍රිකෝණයෙහ පිළිවෙලින් BC, CA, AB පාද මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වන විට AD, BE, CF රේඛා ඒකලක්ෂ්‍ය වීම සඳහා අවශ්‍යතාව සඳහන් කර එය සාධනය කරන්න.

ඉහත අවශ්‍යතාව සැපිරේ නම්, DA, EB සහ FC ට සමාන්තර ව පිළිවෙලින් $B'C'$, $C'A'$ සහ $A'B'$ ඇඳීමෙන් $A'B'C'$ නම් වෙනත් ත්‍රිකෝණයක් අඳිනු ලැබේ. BC ට සමාන්තරව A' හරහා ඇඳි රේඛාව X හිදී $B'C'$ හමුවන අතර CA ට සමාන්තරව B' හරහා ඇඳි රේඛාව Y හිදී $C'A'$ හමුවේ. $A'X$ සහ $B'Y$ රේඛා G හිදී ඡේදනය වේ. $C'G$ සහ BA සමාන්තර බව පෙන්වන්න.

2.



$ABCD\,A'B'C'D'$ යනු දරවල දිග a වූ ඝනකයකි. P වූ කලී $BP = \lambda.PB'$ වන පරිදි BB' දරය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AD' රේඛාව සහ P ලක්ෂ්‍යය අඩංගු තලය $B'C'$ දරය Q හිදී හමුවේ. $C'Q = \lambda.QB'$ බව පෙන්වන්න.

තව ද, a සහ λ ඇසුරෙන්

(අ) PQ හි දිග, (ආ) $\cos A\hat{P}Q$, (ඉ) $APQD'$ හි වර්ගඵලය,
සොයන්න.

3. $ax + by + c = 0$ රේඛාව මත (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න.

$ABCD$ යනු $B \equiv (1, 0)$ සහ AB, AC හි සමීකරණ පිළිවෙලින් $y - x + 1 = 0$ සහ $y - 3x = 0$ වන සේ වූ රොම්බසයකි. DA, CD සහ BC රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

තව ද, $ABCD$ රොම්බසයේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

4. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය මත පිහිටි Q_1, Q_2 ලක්ෂ්‍ය හරහා වූ ස්පර්ශක $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ හිදී හමුවේ. P_0 ලක්ෂ්‍යයෙහි Q_1Q_2 ස්පර්ශ ජ්‍යායෙහි සමීකරණය

$$x x_0 + y y_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$$

බව පෙන්වන්න.

$$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0 \text{ සහ } x^2 + y^2 + 2x + 8y + 5 = 0$$

වෘත්තවලට අනුබද්ධව $(1, -2)$ ලක්ෂ්‍යයේ ස්පර්ශ ජ්‍යායන් සම්පාත වන බව සාධනය කරන්න.

තව ද, ඉහත දක්වූ වෘත්තවලට අනුබද්ධව ස්පර්ශ ජ්‍යායන් එකම වන පරිදි වෙනත් ලක්ෂ්‍යයක් තිබෙන බව පෙන්වා එහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න

5. (i) O ධ්‍රැවයේ සිට දී ඇති (O හරහා නොයන) l සරල රේඛාවකට ඇඳි ලම්බය, ආරම්භක රේඛාව සමඟ α කෝණයක් සාදන අතර එහි දිග d වේ. l හි සමීකරණය $r = d \sec(\theta - \alpha)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $r \cos\theta = 3$ සහ $r \sin\theta = 4$ සමීකරණවලින් සරල රේඛා දෙකක් නිරූපනය කෙරෙන බව පෙන්වා

(අ) ඒවා අතර කෝණය ද,

(ආ) ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

(ii) එකම රූප සටහනෙහි,

(අ) $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$,

(ආ) $x^2 - 4y = 0$,

(ඇ) $y - x + 1 = 0$

වක්‍රවල කටුසටහන් අඳින්න.

$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leq 0$, $x^2 - 4y \geq 0$ සහ $y - x + 1 \geq 0$ අසමානතා සපුරාලන්නාවූ, $x - y$ තලයේ R පෙදෙස සටහන් කරන්න. R තුළ $x^2 + y^2$ හි වැඩිතම අගය ලබා ගන්න.

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට $(at_1^2, 2at_1)$ සහ $(at_2^2, 2at_2)$ ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය $\{at_1t_2, a(t_1 + t_2)\}$ බව පෙන්වන්න.

$(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි ස්පර්ශකය $P \equiv (aT^2, 2aT)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා වූ ස්පර්ශකය සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම්

$$t^2(1 - T^2 \tan^2\alpha) - 2Tt \sec^2\alpha + T^2 - \tan^2\alpha = 0$$

සමීකරණයෙන් t ගෙන දෙන බව පෙන්වන්න.

එවැනි ස්පර්ශක දෙකක් පවතින බව අපෝහනය කර, ඒවායේ Q ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක, T සහ α ඇසුරෙන් සොයන්න.

PQ හි සමීකරණය

$$y - 2aT = -\frac{2T}{1 - T^2}(x - aT^2)$$

බව ද පරාවලය මත P චලනය වන විට එය අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව ද පෙන්වන්න.

7. $P \equiv \left\{\frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}, \frac{2bt}{1 + t^2}\right\}$ ලක්ෂ්‍යය $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

P හි දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$b(1 - t^2)x + 2aty = (1 + t^2)ab$$

බව ද පෙන්වන්න.

ඉලිප්සය මත වූ Q ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක

$\left\{\frac{-2at}{1 + t^2}, \frac{b(1 - t^2)}{1 + t^2}\right\}$ වෙයි. Q හි දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියන්න.

තව ද, t විචලනය වන විට, (අ) $OP^2 + OQ^2$ (ආ) OPQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය නියතව පවතින බව ද පෙන්වන්න; මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය යි.

P සහ Q හිදී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශක එකිනෙකට T හිදී හමුවේ. t විචලනය වන විට, T ලක්ෂ්‍යය වෙනත් ඉලිප්සයක් මත පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

8. $x^2 - y^2 = a^2$ බහුවලයේ විකේන්ද්‍රිකතාව සොයා එහි, S, S' නාභිවල ඛණ්ඩාංක ලියන්න. තව ද, S සහ S' ට අනුරූප නියාමකයන්ගේ සමීකරණ ද ලියන්න.

සුදුසු පරිදි ඛණ්ඩාංක අක්ෂ තලකයක් තෝරා ගැනීමෙන් බහුවලයේ සමීකරණය $xy = \frac{a^2}{2}$ ලෙස ගත හැකි බව පෙන්වා නාභි දෙකෙහි ඛණ්ඩාංක ද අනුරූප නියාමකවල සමීකරණ ද ලියන්න.

සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයක ස්පර්ශෝන්මුඛ දෙකට S නාභියේ සිට ඇඳි ලම්බවල අඩි L සහ M වෙයි. LM යනු S ට අනුරූප වූ නියාමකය බව පෙන්වන්න.

SL රේඛාව N හි දී බහුවලය හමුවේ නම්, N හිදී බහුවලයට ඇඳි ස්පර්ශකය M හරහා යන බව පෙන්වන්න.

5. (i) O ධ්‍රැවයේ සිට දී ඇති (O හරහා නොයන) l සරල රේඛාවකට ඇඳි ලම්බය, ආරම්භක රේඛාව සමග α කෝණයක් සාදන අතර එහි දිග d වේ. l හි සමීකරණය $r = d \sec (\theta - \alpha)$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $r \cos \theta = 3$ සහ $r \sin \theta = 4$ සමීකරණවලින් සරල රේඛා දෙකක් නිරූපනය කෙරෙන බව පෙන්වා

(අ) ඒවා අතර කෝණය ද,

(ආ) ඡේදන ලක්ෂයේ ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

(ii) එකම රූප සටහනෙහි,

(අ) $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$,

(ආ) $x^2 - 4y = 0$,

(ඉ) $y - x + 1 = 0$

වක්‍රවල කටුසටහන් අඳින්න.

$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leqslant 0$, $x^2 - 4y \geqslant 0$ සහ $y - x + 1 \geqslant 0$ අසමානතා සපුරාලන්නාවූ, $x - y$ තලයේ R පෙදෙස සටහන් කරන්න. R තුළ $x^2 + y^2$ හි වැඩිතම අගය ලබා ගන්න.

6. $y^2 = 4ax$ පරාවලයට $(at_1^2, 2at_1)$ සහ $(at_2^2, 2at_2)$ ලක්ෂවල දී ඇඳි ස්පර්ශකවල ඡේදන ලක්ෂය $\{ at_1t_2, a(t_1 + t_2) \}$ බව පෙන්වන්න.

$(at^2, 2at)$ ලක්ෂයෙහි ස්පර්ශකය $P \equiv (aT^2, 2aT)$ ලක්ෂය හරහා වූ ස්පර්ශකය සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම්

$$t^2(1 - T^2 \tan^2 \alpha) - 2Tt \sec^2 \alpha + T^2 - \tan^2 \alpha = 0$$

සමීකරණයෙන් t ගෙන දෙන බව පෙන්වන්න.

එවැනි ස්පර්ශක දෙකක් පවතින බව අපෝහනය කර, ඒවායේ Q ඡේදන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක, T සහ α ඇසුරෙන් සොයන්න.

PQ හි සමීකරණය

$$y - 2aT = - \frac{2T}{1 - T^2} (x - aT^2)$$

බව ද පරාවලය මත P චලනය වන විට එය අචල ලක්ෂයක් හරහා යන බව ද පෙන්වන්න.

7. $P \equiv \left\{ \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2} , \frac{2b\, t}{1 + t^2} \right\}$ ලක්ෂය $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ඉලිප්සය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

P හි දී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$b(1 - t^2)\, x + 2aty = (1 + t^2)ab$$

බව ද පෙන්වන්න.

ඉලිප්සය මත වූ Q ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක

$\left\{ \frac{-2at}{1 + t^2} , \frac{b(1 - t^2)}{1 + t^2} \right\}$ වෙයි. Q හි දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලියන්න.

තව ද, t විචලනය වන විට, (අ) $OP^2 + OQ^2$ (ආ) OPQ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය නියතව පවතින බව ද පෙන්වන්න; මෙහි O යනු මූල ලක්ෂය යි.

P සහ Q හිදී ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශක එකිනෙකට T හිදී හමුවේ. t විචලනය වන විට, T ලක්ෂය වෙනත් ඉලිප්සයක් මත පිහිටන බව ද පෙන්වන්න.

8. $x^2 - y^2 = a^2$ බහුවලයේ විකේන්ද්‍රිකතාව සොයා එහි, S, S' නාභිවල ඛණ්ඩාංක ලියන්න. තව ද, S සහ S' ට අනුරූප නියාමිකයන්ගේ සමීකරණ ද ලියන්න.

සුදුසු පරිදි ඛණ්ඩාංක අක්ෂ තලකයක් තෝරා ගැනීමෙන් බහුවලයේ සමීකරණය $xy = \frac{a^2}{2}$ ලෙස ගත හැකි බව පෙන්වා නාභි දෙකෙහි ඛණ්ඩාංක ද අනුරූප නියාමිකවල සමීකරණ ද ලියන්න.

සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයක ස්පර්ශෝන්මුඛ දෙකට S නාභියේ සිට ඇඳි ලම්බවල අඩි L සහ M වෙයි. LM යනු S ට අනුරූප වූ නියාමිකය බව පෙන්වන්න.

SL රේඛාව N හි දී බහුවලය හමුවේ නම්, N හිදී බහුවලයට ඇඳි ස්පර්ශකය M හරහා යන බව පෙන්වන්න.